المحاضرة الثانية

مبرهنة: (تقبل دون إثبات)

ليكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعاً تحليلياً، عندئذٍ فإنّ العبارة الصريحة لـ f بدلالة z تُعطى بالمساواة التالية: $f(z) = u(z,0) + i(v(z,0))$

بمعنى آخر: يمكن كتابة التابع العقدي بدلالة z باستبدال كل x بـ z وكل y بـ 0.

تمرين: أثبت أنّ التابع التالي تحليلي باستخدام شرطي كوشي-ريمان، ثمّ اكتب العبارة الصريحة للتابع f بدلالة z.

$$f(z) = e^x \cos y + (e^x \sin y)i$$

الحل:

لدينا

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad , \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

إنَّ كلاً من u, v قابل للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ لأنّ مشتقاتهما الجزئية من المرتبة الأولى موجودة ومستمرة على $\mathbb{R}^2$، كما أن شرطي كوشي-ريمان محقّقان لأجل أي (x,y) من $\mathbb{R}^2$ حيث أنَّ:

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

وبالتالي فإنّ f تحليلي على $\mathbb{C}$. ولكتابة العبارة الصريحة لـ f بدلالة z نبدل كل x بـ z وكل y بـ 0 فنجد:

$$f(z) = e^z \cos 0 + (e^z \sin 0)i = e^z$$

ملاحظة: سنرى تعريف التابع الأسي العقدي لاحقاً.

التابع الممثّل بمتسلسلة قوى:

لتكن $r > 0$، ولتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ متسلسلة قوى نصف قطر تقاربها r. عندئذٍ نستطيع تعريف تابع f على قرص تقارب هذه المتسلسلة، $D(z_0,r)$ ، بالمساواة التالية:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

ونُسمّي هذا التابع، التابع الممثّل بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

مبرهنة: إن التابع الممثّل بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ قابل للاشتقاق (تحليلي) على قرص تقاربها، ومشتقه هو التابع الممثّل بالمتسلسلة المشتقة لـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

أي أنّ:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(z-z_0)^{n-1}\qquad \forall z\in D(z_0,r)$$

نتيجة: يمكن اشتقاق متسلسلة القوى على قرص تقاربها حداً حداً، أي أنَّ:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(z-z_0)^{n-1}$$

مثال: نعلم أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\quad :\ \forall z\in D(0,1)$$

أي أنّ التابع $f(z)=\frac{1}{1-z}$ الذي منطلقه $D(0,1)$ ممثّل بالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ على قرص تقاربها وهو $D(0,1)$.

ملاحظة: إنّ التابع $g(z)=\frac{1}{1-z}$ معرّف على كامل المستوي العقدي باستثناء النقطة $z=1$، إلا أنّ التابع f الممثل بالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ والتابع $g(z)=\frac{1}{1-z}$ غير متساويين إلا على القرص $D(0,1)$ (قرص تقارب المتسلسلة)، وبالتالي فإن المشتق لـ f معرف بالمساواة:

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\qquad \forall z\in D(0,1)$$

نتائج المبرهنة الأخيرة:

1. إذا كان f تابعاً ممثّلاً بمتسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$، فإن f تابع قابل للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على قرص تقاربها وإنّ مشتقه من مرتبة كيفية k معرف على ذلك القرص بالمساواة:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n(z-z_0)^{n-k}\qquad (*)$$

الإثبات:

حسب المبرهنة السابقة، فإن أي تابع ممثل بمتسلسلة قوى هو تابع قابل للاشتقاق ومشتقه ممثل بالمتسلسلة المشتقة للمتسلسلة الممثلة لذلك التابع، وبالتالي فإن f' ، f''، ....، $f^{(k)}$، لأجل أي مرتبة k ، موجودة ومعرفة على قرص التقارب وإن:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\,(z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n(z-z_0)^{n-k}$$

2. لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ متسلسلتي قوى متحدتين بالمركز ولهما المجموع ذاته على قرص التقارب $D(z_0,r)$، عندئذٍ فإنّهما متسلسلتان متطابقتان.

الإثبات:

لنرمز بـ f ، g للتابعين الممثّلين بالمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$،$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ على الترتيب. بالتعويض في $(*)$ نجد:

$$f^{(k)}(z_0)=k(k-1)(k-2)\dots(2)(1)a_k+\sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n(z-z_0)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(z_0)=k!\,a_k+0\Longrightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\ :\ \forall k\geq 0$$

بنفس الأسلوب نجد أنّ:

$$b_k=\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\ :\ \forall k\geq 0$$

ولما كان $f(z)=g(z)$ على قرص التقارب (فرضاً) فإنّ $f^{(k)}(z)=g^{(k)}(z)$، وذلك محقّق لأجل أي z من $D(z_0,r)$ وأي $0\leq k$. وبالتالي:

$$f^{(k)}(z_0)=g^{(k)}(z_0)\overset{k!\text{بالقسمة على}}{\Longrightarrow}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\Longrightarrow a_k=b_k\ :\forall k\geq 0$$

وهذا يبيّن أنّ المتسلسلتين متطابقتان لتطابق أمثالهما.

مما سبق نجد:

- ❖ متسلسلة القوى والتي مركزها z_0 الممثّلة لتابع عقدي هي متسلسلة وحيدة.
- ❖ إذا اختلفت متسلسلتا قوى متحدتان بالمركز فإنّ التابعين الممثّلين بهما مختلفان.

3. إذا تطابقت متسلسلتا قوى متحدتان بالمركز عند مجموعة غير منتهية من النقاط التي تتجمع (تتراكم) عند مركز هاتين المتسلسلتين فإنّ هاتين المتسلسلتين متطابقتان.

لتكن A مجموعة غير منتهية من الأعداد العقدية، ولتكن $z_0 \in A'$، عندئذٍ فإنّه يوجد متتالية $\{z_n\}$ من عناصر A تتقارب من النقطة z_0، أي أنّ $z_n \longrightarrow z_0$.

ولنفرض أنّ المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ متطابقتان عند كل نقطة من نقاط A.

وليكن g, f التابعين الممثّلين بالمتسلسلتين السابقتين على الترتيب، وبملاحظة أنّ $z_n \in A$ يكون لدينا: $f(z_n) = g(z_n)$ ، و بأخذ نهاية الطرفين :

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n)$$

وبما أنّ كل من f, g قابل للاشتقاق على A (مبرهنة)، وبالتالي كل منهما مستمر، بالنتيجة:

$$f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) \Longrightarrow f(z_0) = g(z_0) \Longrightarrow a_0 = b_0$$

بتكرار نفس العملية لأجل f', g' نجد:

$$f'(z_0) = g'(z_0) \Longrightarrow a_1 = b_1$$

$$\vdots$$

بتكرار نفس العملية حتى المرتبة k نجد:

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \Longrightarrow a_k = b_k$$

بالاستقراء الرياضي نجد أنّ:

$$a_n = b_n \quad : \quad \forall\, n \geq 0$$

وبالتالي فالمتسلسلتان متطابقتان.

التوابع العقدية المألوفة:

1. كثير الحدود العقدي:

هو تابع قاعدة ربطه $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت عقدية.

إنّ توابع كثيرات الحدود العقدية تحليلية على $\mathbb{C}$. وهذا يقتضي أنها قابلة للاشتقاق ومستمرة ومعرفة على $\mathbb{C}$.

2. التوابع الكسرية العقدية:

هي توابع قاعدة ربطها لها الشكل $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث $P(z), Q(z)$ كثيرا حدود عقديين.

إنّ التوابع العقدية الكسرية تحليلية على المجموعة $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

3. التابع الأسي العقدي:

من المعروف في التحليل الحقيقي أنّ: $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ لأجل أي x من $\mathbb{R}$.

باستبدال المتحول العقدي z بالمتحول الحقيقي x في المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$، نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. وقد بينّا، في مقرر التحليل العقدي (1)، أنّ هذه المتسلسلة متقاربة بالإطلاق على كامل المستوي العقدي "أي أنّ نصف قطر تقاربها يساوي ∞"، وبالتالي فإنّ التابع الممثّل بهذه المتسلسلة والذي سنرمز له بـــ e^{z} أو بـ Exp تحليلي على $\mathbb{C}$ "حسب مبرهنة سابقة"، أي أنّ: e^{z} معرف على $\mathbb{C}$ بالمساواة:

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

وأنّ مشتقه يُعطى بالمساواة:

$$(e^{z})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \underset{n\leftrightarrow n+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^{z}$$

أي أنّ التابع الأسي يساوي مشتقه.

...انتهت المحاضرة الثانية...